d) on pose $f(x)=\sqrt[3]{x}$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

e) on pose $f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{3.\sqrt[3]{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}=0$$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$

$$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=\sqrt[12]{x^4}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt[6]{x^6}}=\sqrt[12]{x^6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}-\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}}-\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}-\sqrt[12]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}.(1-\sqrt[12]{x^2})=-\infty$$

EX 20 :

$f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$$

f non dérivable à droite en 0

x	0	$+\infty$
f '(x)	| +	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

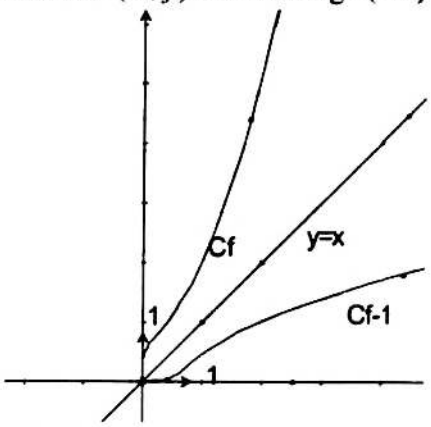
2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$f(\mathbb{R}_+)=\left[f(0),\lim_{+\infty}f\right[=\mathbb{R}_+=J$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



EX 21 :

$f(x)=x.\sqrt[3]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

2) comme étant produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x}+x\left(\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{x}.(\sqrt[3]{x})^2+x}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4(\sqrt[3]{x})^3}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$Rq:\begin{pmatrix}f(x)=x^{4/3}\\ f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\end{pmatrix}$$

3) $f'(x)>0$; $\forall x\in]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn